1.5.3 Násobek a dělitel čísla I

Předpoklady: 010502

Pedagogická poznámka: Tuto a následující hodinu (která normálně zabírá pouze polovinu vyučovací hodiny) je možné probrat ve 45 minutách, pokud se nebude řešit příklad 1 a tabulku s rozdělením čísel pomocí násobků nebudou žáci sestavovat a samostatně zapisovat do sešitů a jenom ji promítnete z projektoru.

Poznámka: Až do konce kapitoly budeme uvažovat pouze přirozená čísla.

Platí: $45 = 5 \cdot 9$ nebo $45 = 9 \cdot 5$
Rovnost můžeme vyjádřit i slovně:
45 je násobkem 5. 5 je dělitel 45.
45 je násobkem 9. 9 je dělitel 45.

Př. 1: Doplň větu, kde je předchozí skutečnost popsána obecně.
"Číslo *a* je násobkem čísla *b* (číslo *b* je dělitel čísla *a*) právě tehdy, když existuje přirozené číslo *k* takové, že …"

Číslo *a* je násobkem čísla *b* (číslo *b* je dělitel čísla *a*) právě tehdy, když existuje přirozené číslo *k* takové, že $a = k \cdot b$.

Píše se také: $b|a$ (čteme: b dělí a).

Konkrétně: $5|30$ (čteme: 5 dělí 30.

Soudělná čísla mají společného dělitele většího než 1.
Nesoudělná čísla mají jediného společného dělitele - číslo 1.

Pedagogická poznámka: Tabulku nechávám z co největší části vypracovat žáky (je třeba ohlídat, aby u dvojky použili zápis $2 = 2 \cdot 1 + 0$ místo $2 = 2 \cdot 0 + 2$). Po jejím doplnění dostanou žáci chvilku, aby se podívali, zda je v ní něco zajímavého. Pokud se neobjeví očekávaný závěr, prohlédneme si druhý sloupec pomocí násobku čísel 2. Žáci přijdou na to, že se stále opakují pouze dva zbytky a je tedy možné rozdělit čísla do dvou skupin. Rozdělení podle zbytkových tříd 3 a 4 pak udělají úplně sami.

Přirozená čísla můžeme zapisovat pomocí co největších násobků jiných přirozených čísel:

Číslo	Pomocí násobku 2	Pomocí násobku 3	Pomocí násobku 4
1	$2 \cdot 0+1$	$3 \cdot 0+1$	$4 \cdot 0+1$
2	$2 \cdot 1+0$	$3 \cdot 0+2$	$4 \cdot 0+2$
3	$2 \cdot 1+1$	$3 \cdot 1+0$	$4 \cdot 0+3$
4	$2 \cdot 2+0$	$3 \cdot 1+1$	$4 \cdot 1+0$
5	$2 \cdot 2+1$	$3 \cdot 1+2$	$4 \cdot 1+1$
6	$2 \cdot 3+0$	$3 \cdot 2+0$	$4 \cdot 1+2$
13	$2 \cdot 6+1$	$3 \cdot 4+1$	$4 \cdot 3+1$
…	…	…	…

Do tabulky bychom mohli napsat i další přirozená čísla.

Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit do 2 skupin podle zbytku po dělení 2:
● zbytek 0 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $2k+0=2k$ (sudá čísla),
● zbytek 1 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $2k+1$ (lichá čísla).

Podobně pro 3 (ale tři skupiny):
● zbytek 0 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k+0=3k$,
● zbytek 1 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k+1$,
● zbytek 2 $\Rightarrow$ čísla zapsatelná ve tvaru $3k+2$.

Pro 4 jsou čtyři skupiny: $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$.

Př. 2: Zapiš skupiny, do kterých můžeme rozdělit přirozená čísla podle zbytků po dělení pěti. Ke každé skupině napiš ta z čísel $\{10;2;9;26;155;48\}$, která do ní patří.

Při dělení šesti můžeme získat pět různých hodnot zbytku 0 až 4 $\Rightarrow$ skupiny:

- $5k$ - $\{10,155\}$,
- $5k+1$ - $\{26\}$,
- $5k+2$ - $\{2\}$,
- $5k+3$ - $\{48\}$,
- $5k+4$ - $\{9\}$.

Předchozí poznatek obecně
Každé přirozené číslo *n* lze pomocí přirozeného čísla $b>1$ vyjádřit jedním z výrazů: $bk, bk+1, bk+2, ..., bk+(b-1)$**, kde $k \in N_0$.**
(stručnější zápis: $\forall n \in N$, $\forall b \in N, b>1$: $n=bk+z$, $z \in \{0,1,...,b-1\}$, $k \in N_0$.

Množině čísel, kterou můžeme každým takovým výrazem vyjádřit, se říká **zbytková třída** $\Rightarrow$ přirozená čísla je tedy možné podle zbytku po dělení dvěma rozdělit do dvou zbytkových tříd: $2k$ a $2k+1$.

Př. 3: Platí $17=2\cdot 6+5$. Které z konkrétních čísel uvedených v předchozí rovnosti odpovídá jednotlivým písmenům z předchozí věty (*n*, *b*, *k*, *z*)?

17 je číslo, které rozkládáme na součin $\Rightarrow$ $n=17$.
5 je zbytek po dělení (proto označení *z*) $\Rightarrow$ písmeno $z=5$.
Čísla 2 a 6 vystupují v součinu $\Rightarrow$ jedno z nich je *b*, druhé *k*. Číslo *b* je číslo, které používáme k rozkladu na skupiny, musí být větší než největší zbytek $\Rightarrow$ platí $b=6$, $k=2$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není zbytečný. Studenti mají často tendenci zcela ignorovat jakákoliv obecná tvrzení (viz hodina 010507). Jediný problém u předchozího příkladu nastává při určování hodnoty *b*, protože v součinu *kb* je oproti větě prohozeno pořadí (schválně). Kontrolu samozřejmě provádíme diskuzí u tabule bez využití projektoru.

Pedagogická poznámka: Pojem zbytkové třídy neuvádím proto, aby se ho žáci museli učit. Nikdy ho nezkouším, ani nedávám do prověrek. Jde pouze o to, aby ho slyšeli, protože se s ním mohou setkat.

Shrnutí: Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle zbytků po dělení číslem k do k skupin.